

Ottimizzazione di un lanciatore bi-stadio

Alessandro Turano **810804**

5 Agosto 2016

Parte I

Introduzione

L'obiettivo di questo elaborato è trovare una stima attendibile del propellente necessario per ottenere un Δv imposto, pari a: $\Delta v = 10000 \text{ m/s}$, mediante un lanciatore bi-stadio con un Payload pari a: $M_{pay} = 200 \text{ kg}$ e, tramite diverse strategie, cercare di minimizzarne la quantità.

Per fare ciò utilizzeremo dei metodi numerici, scritti in linguaggio *MATLAB*, che ci permetteranno di fare delle stime affidabili dei valore realmente ottenibili.

In queste pagine la maggior parte dei dati sono stati ricavati da scelte progettuali, alcuni sono valori tipici di lanciatori civili che andrebbero ricavati sperimentalmente o con un progetto più dettagliato, mentre altri sono stati oggetto di metodi numerici per conseguire l'obiettivo prefissato.

Parte II

Indice

Indice

I	Introduzione	2
II	Indice	3
III	Ottimizzazione	4
1	Impulsi specifici	4
1.1	Primo stadio	4
1.2	Secondo stadio	5
2	Suddivisione Δv	7
3	Correzione approssimazioni	9
3.1	Ragionamento alla base del metodo	9
3.2	Metodo	9
3.3	Codice	12
3.4	Risultati e Grafici	13
3.5	Considerazioni finali	15
4	Tempo di attesa tra i due stadi	16
5	Traiettoria curva	17
5.1	Metodo	17
5.2	Risultati e grafici	18
IV	Conclusioni	21

Parte III

Ottimizzazione

1 Impulsi specifici

Il primo passo da fare è calcolare gli impulsi specifici di entrambi gli stadi e le quantità da cui dipende la sua parte statica.

1.1 Primo stadio

Per il primo stadio ho deciso di utilizzare un sistema a propellente solido, con una pressione in camera di combustione imposta a: $P_{cc} = 90 \text{ bar}$ e un ugello adattato a pressione ambiente, in modo da ottenere il rendimento più alto al momento del decollo, oltre che evitare eventuali problemi di sovra-espansione.

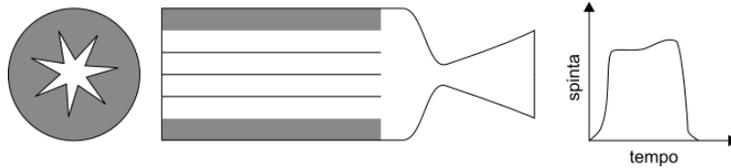
Le caratteristiche termochimiche del grano propellente sono note:

$$T_{cc} = 3300 \text{ K}$$

$$M_{mol} = 29 \text{ g/mol}$$

$$k = \frac{C_p}{C_v} = 1.2$$

Come geometria del grano ho scelto di adottare una geometria Finocyl, che fornisce una spinta costante nel tempo, in modo da non avere le forti variazioni di accelerazione che avrei avuto con un grano progressivo, come ad esempio quello a perforazione cilindrica.



Per procedere bisogna conoscere l'impulso specifico alla quota di adattamento, che è possibile calcolare grazie alla formula della velocità di efflusso:

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{T_{cc}}{M_{mol}} R_u \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_{cc}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = 2445.1 \text{ m/s}$$

$$I_{s,ad} = \frac{v_{eff}}{g} = 249.2468 \text{ s}$$

Infine si può imporre un rapporto tra area di gola e area di efflusso pari a:

$$\epsilon = 15$$

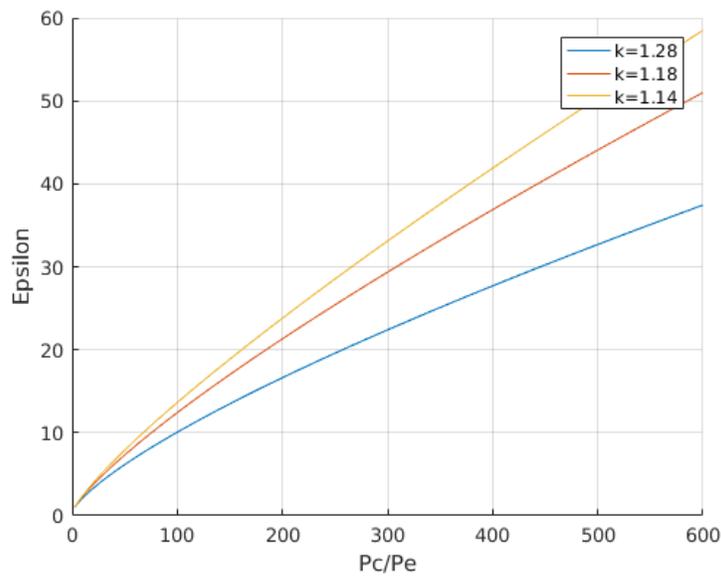
1.2 Secondo stadio

Per il secondo stadio ho deciso di utilizzare un sistema a propellente liquido, in modo da poterne controllare la spinta in caso di manovre non previste.

Partendo dalla pressione in camera di combustione, pari a $P_{cc} = 40 \text{ bar}$, scelgo un rapporto tra ossidante e combustibile che mi permetta di avere una buona spinta senza presentare problemi di raffreddamento.

Servendomi del codice CEA della NASA, ricavo le proprietà termodinamiche per la coppia LH_2/LOX :

O/C	T_c, K	$M, g/mol$	k	T_c/M	$\rho, g/cm^3$
2	1797	6.05	1.28	297.0	0.19
4	2927	9.98	1.18	293.3	0.28
6	3422	13.40	1.14	255.4	0.36



Scelgo di operare con un rapporto pari a: $\frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_{fu}} = 4$, per assicurare gli obiettivi elencati prima.

Per determinare la pressione all'efflusso, e quindi la quota di adattamento, trovo il rapporto tra la pressione in camera di combustione e la pressione all'efflusso, dato un rapporto tra le aree: $\epsilon = 40$ e l'equazione:

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{A_{gola}}{A_{eff}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{P_{eff}}{P_{cc}}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_{eff}}{P_{cc}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

Risolvero l'equazione con il metodo della bisezione, ottenendo:

$$\frac{P_{cc}}{P_{eff}} = 442.8711$$

Quindi grazie ai dati termodinamici trovati con il codice *CEA*, posso trovare l'impulso specifico alla quota di adattamento:

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{T_{cc}}{M_{mol}} R_u \left[1 - \left(\frac{P_c}{P_{cc}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = 4398.9 \text{ m/s}$$

$$I_{s,ad} = \frac{v_{eff}}{g} = 448.4136$$

2 Suddivisione Δv

Per decidere come suddividere il Δv totale ho deciso di servirmi di un procedimento iterativo, in modo da minimizzare la quantità di propellente consumato, mediante l'equazione di Tsiolkovsky.

In questa prima parte, ho trascurato la variazione dell'accelerazione di gravità g , il contributo statico dell'impulso (ho considerato l'impulso come costante e pari all'impulso adattato) e infine la resistenza aerodinamica.

Facendo variare con un ciclo *for* il valore di Δv_1 si può possibile ottenere Δv_2 con una semplice sottrazione:

$$\Delta v_2 = \Delta v - \Delta v_1$$

Successivamente posso determinare la massa di propellente per entrambi gli stadi assumendo fissati alcuni parametri tecnologici; per il primo stadio:

$$\xi_m = \frac{M_{motore}}{M_{iniziale,1}} = 0.024; \quad \xi_t = \frac{M_{serbatoi}}{M_{propellente,1}} = 0.046$$

Mentre per il secondo stadio:

$$\xi_{hw} = \frac{M_{hardware,2}}{M_{propellente,2}} = 0.14$$

È possibile calcolare le due masse iniziali in funzione del Δv e dell'impulso specifico assegnati, utilizzando le definizioni delle varie masse insieme all'equazione di Tsiolkovsky:

$$M_2 = \frac{M_{pay} e^{\frac{\Delta v_2}{90 I_{s,ad,2}}}}{1 + \xi_t - (\xi_m + \xi_t) e^{\frac{\Delta v_2}{90 I_{s,ad,2}}}}; \quad M_1 = \frac{M_2 e^{\frac{\Delta v_1}{90 I_{s,ad,1}}}}{1 + \xi_{hw} - \xi_{hw} e^{\frac{\Delta v_1}{90 I_{s,ad,1}}}}$$

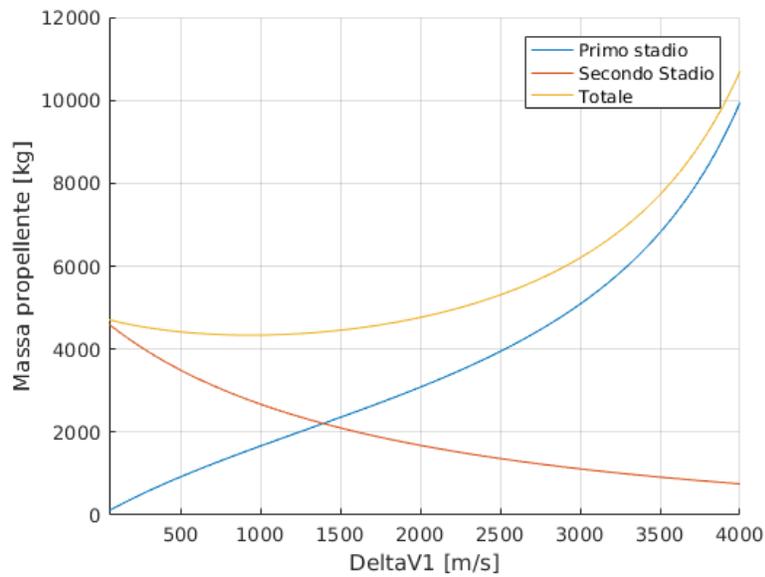
Dopodiché calcolo le masse di propellente consumato invertendo l'equazione di Tsiolkovsky:

$$M_{propellente,1} = M_1 - M_1 / e^{\frac{\Delta v_1}{90 I_{s,ad,1}}}; \quad M_{propellente,2} = M_2 - M_2 / e^{\frac{\Delta v_2}{90 I_{s,ad,2}}}$$

È finalmente possibile iniziare il ciclo, avendo cura di salvare in una matrice i risultati della massa di propellente trovata ad ogni iterazione.

Per non considerare anche le soluzioni fisicamente prive di senso, come una massa del propellente negativa (risultanti da un Δv irrealizzabile) scarto le masse negative con un semplice controllo sul loro segno, ponendole uguali a infinito,.

Infine con il comando *min* posso trovare il valore più basso di massa di propellente consumata.



Nel nostro caso la suddivisione ideale è (come si può anche evincere dal grafico sopra):

$$M_{propellente,1} = 1569.3 \text{ kg}; \quad M_{propellente,2} = 2767.7 \text{ kg}$$

$$\Delta v_1 = 930 \text{ m/s}; \quad \Delta v_2 = 9070 \text{ m/s}$$

3 Correzione approssimazioni

In questo capitolo andrò a considerare i contributi trascurati nel capitolo precedente, servendoci sempre di un metodo numerico.

3.1 Ragionamento alla base del metodo

Dopo aver calcolato le masse iniziali e di propellente con l'equazione di Tsiolkovsky, utilizzo queste masse per iniziare dei cicli a tempo discreto.

Questi cicli calcoleranno i vari contributi di impulso statico, forza di gravità e forza aerodinamica, nella condizione attuale. I contributi verranno sommati al Δv di Tsiolkovsky in dt , per ottenere la vera differenza di velocità ottenuta in una singola iterazione.

In questo modo si può calcolare quale Δv teorico di Tsiolkovsky permette di ottenere il Δv reale richiesto.

Questo viene fatto più volte con un ciclo che utilizzerà il valore di Δv totale calcolato a fine iterazione, come Δv da ottenere all'inizio della nuova iterazione, fino a raggiungere la convergenza.

Nelle prossime righe il procedimento verrà spiegato in modo più dettagliato.

3.2 Metodo

Dopo aver inizializzato le nostre matrici posso scrivere il ciclo *while* con due condizioni di arresto: la prima è una tolleranza sulla differenza del Δv calcolato tra due iterazioni, la seconda è una verifica che l'equazione di Tsiolkovsky non abbia prodotto risultati fisicamente non accettabili. Le due condizioni si devono verificare contemporaneamente.

Il metodo viene avviato considerando come Δv iniziale i valori calcolati prima; da cui è possibile calcolare, come fatto più sopra, la relativa massa iniziale e massa di propellente.

Quindi è possibile calcolare la portata massica imponendo un'accelerazione massima al decollo e all'inizio del primo stadio.

In questo caso considero una traiettoria verticale per minimizzare la forza d'attrito, anche se in questo modo il lanciatore subisce il massimo contributo della forza di gravità, e un'accelerazione massima pari ad $1.5g$.

Poiché questa è solo una condizione sull'accelerazione al decollo, le cui piccole variazioni non influiscono in modo significativo sulla massa di propellente da utilizzare, semplifico i calcoli considerando come impulso specifico l'impulso adattato.

Quindi le due portate massiche sono:

$$\dot{m}_1 = \frac{2.5 M_1}{I_{s,ad,1}}; \quad \dot{m}_2 = \frac{2.5 M_1}{I_{s,ad,2}}$$

A questo punto ci serve calcolare la densità all'efflusso da inserire nella parte statica dell'impulso:

$$\rho_{cc,1} = \frac{P_{cc,1}}{R_{u,1}/M_{mol,1}T_{cc,1}}$$

$$\rho_{gola,1} = \rho_{cc,1} \left(\frac{2}{k_1+1} \right)^{\frac{1}{k_1-1}}; \quad T_{gola,1} = T_{cc,1} \frac{2}{k_1+1}$$

$$A_{gola,1} = \frac{\dot{m}_1}{\rho_{gola,1} \sqrt{\frac{k_1 R_u T_{gola,1}}{M_{mol,1}}}}; \quad A_{eff,1} = \epsilon A_{gola,1}$$

$$\rho_{eff,1} = \frac{\dot{m}}{V_{eff,1} A_{eff,1}}$$

Mentre per il secondo stadio:

$$\frac{T_{eff,2}}{T_{cc,2}} = \left(\frac{P_{eff,2}}{P_{cc,2}} \right)^{\frac{k_2-1}{k_2}}$$

$$\rho_{eff,2} = \rho_{cc,2} \left(\frac{T_{eff,2}}{T_{cc,2}} \right)^{\frac{1}{k_2-1}}$$

Partendo dal primo stadio (il procedimento è analogo anche per lo stadio liquido) annido un secondo ciclo *while* le cui condizioni di arresto sono che il Δv ottenuto sia uguale a quello imposto e che, come prima, i risultati siano fisicamente accettabili.

Il primo passo è calcolare l'accelerazione di gravità aggiornata quota:

$$g = G \frac{M_{terra}}{(R_{terra}+h)^2}$$

Dopodiché calcolo temperatura, pressione e densità alla quota in cui mi trovo secondo l'Atmosfera Standard. A questo punto posso calcolare la parte statica dell'impulso specifico e sommarla all'impulso adattato:

$$I_{s,st} = \frac{P_{eff} - P_a}{\rho_{eff} v_{eff} g}$$

$$I_s = I_{s,ad} + I_{s,st}$$

Pongo come massa iniziale la massa finale dell'iterazione precedente e come massa finale:

$$M_f = M_i - \dot{m} dt$$

$$MR = \frac{M_f}{M_i}$$

Adesso posso calcolare la differenza di velocità data dall'equazione di Tsiolkovsky, a cui sottrarrò i contributi di forza di gravità e resistenza aerodinamica:

$$\Delta v_T = -g I_s \ln(MR)$$

$$\Delta v_g = g dt$$

$$\Delta v_a = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_d \left(\frac{dt}{M_i} \right)$$

$$\Delta v = \Delta v_T - \Delta v_g - \Delta v_a$$

$$v^{(i)} = v^{(i-1)} + \Delta v$$

A questo punto posso aggiornare la quota calcolata alla fine dell'iterazione e salvare in delle matrici tutti i vari Δv (in particolare la somma di tutti i Δv_T , che altro non sarebbe che il Δv teorico necessario a raggiungere il nostro Δv reale) e le quote raggiunte nelle varie iterazioni.

Controllo che Tsiolkovsky non abbia prodotto risultati privi di senso e nel caso questo fosse accaduto, cambio valore ad un apposito parametro (che salta i cicli successivi e che fa ripartire il primo ciclo *while*), oltre che aumentare leggermente la massa di propellente imbarcato nello stadio in cui si è verificato l'errore.

A questo punto se non si presentano errori il secondo ciclo *while* continuerà fino a raggiungere il Δv imposto, dopodiché inizierà un ciclo analogo al primo che riguarda lo stadio liquido.

Una volta che entrambi saranno completati senza errori, inseriremo i Δv di Tsiolkovsky, cioè, come detto prima, i Δv teorici necessari ad ottenere il nostro Δv reale imposto, nelle prime equazioni di questo capitolo, che ci permettono di ricavare le nuove masse in gioco.

Il procedimento va avanti finché non si raggiunge la convergenza, cioè si hanno due iterazioni successive la cui differenza tra il Δv teorico necessario calcolato all'iterazione precedente e il nuovo Δv calcolato a fine iterazione non è, in valore assoluto, maggiore di un determinato valore.

Questo valore è la nostra tolleranza.

3.3 Codice

Ho scelto come valore di $dt = 0.1 s$, in modo da attendere solo pochi secondi prima della convergenza (è possibile diminuire questo valore a patto di avere a disposizione più potenza di calcolo o tempi di attesa di gran lunga maggiori) e un valore di tolleranza sul Δv pari ad $1 m/s$.

Per quanto riguarda la resistenza aerodinamica ho assunto il coefficiente di resistenza pari a: $c_d = 0.5$ e la superficie pari a: $S = \pi(0.75m)^2$.

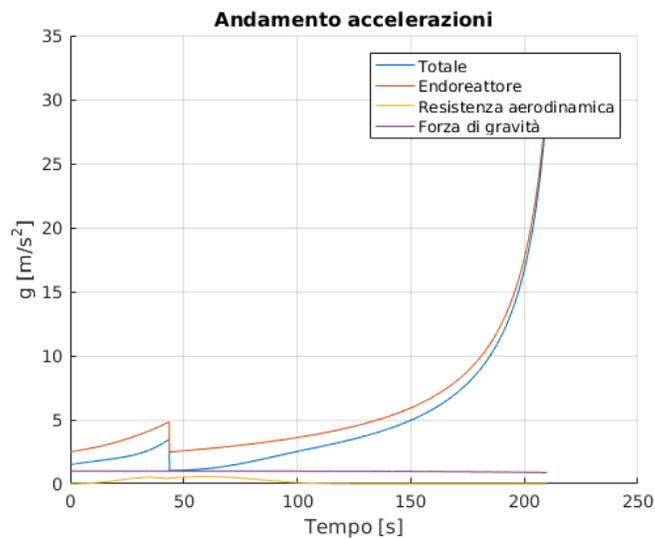
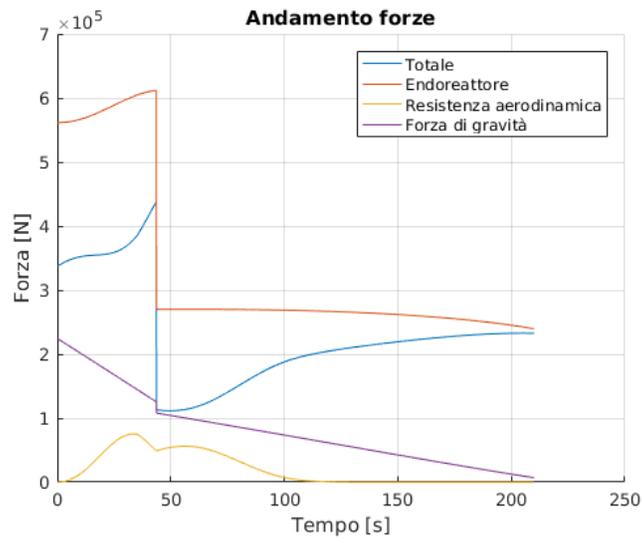
Questi valori devono essere calcolati in base a test sperimentali o in seguito ad una stima più accurata del raggio del lanciatore (nel nostro caso, poiché ho deciso di utilizzare una geometria del grano di tipo Finocyl, risulta difficile stimarlo correttamente).

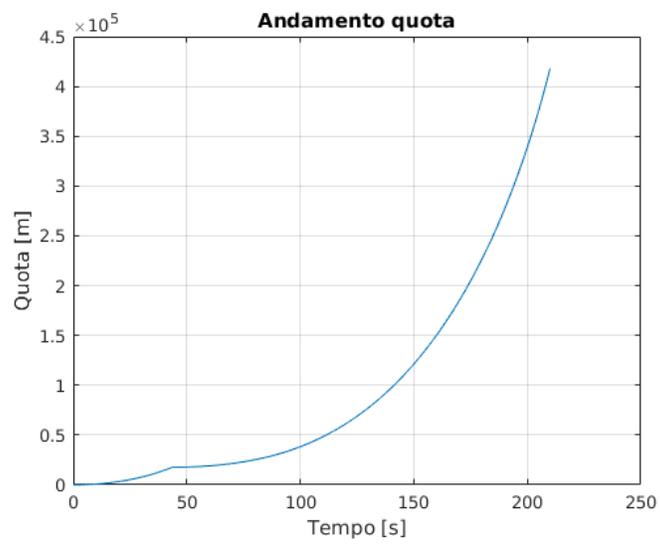
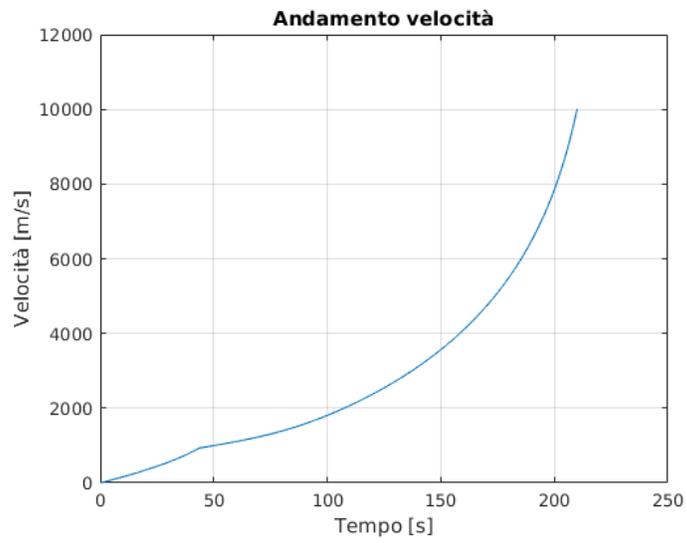
3.4 Risultati e Grafici

Sono presenti i risultati trovati, seguiti da alcuni grafici significativi:

$$\Delta v_{T,1} = 1476.0 \text{ m/s}; \quad \Delta v_{T,1} = 10885 \text{ m/s}$$

$$M_{propellente,1} = 10372 \text{ kg}; \quad M_{propellente,2} = 10131 \text{ kg}$$





3.5 Considerazioni finali

Dal grafico delle forze si vede bene come variano i contributi.

La spinta passa dall'essere costante ad assumere una forma curva, dovuta alla differenza di pressione tra quota di adattamento e quota attuale.

La resistenza aerodinamica cresce inizialmente per poi decrescere dopo aver raggiunto un massimo, cioè è dovuto alla velocità crescente il cui contributo viene poi superato dalla diminuzione della densità dell'aria.

La forza di gravità decresce sia con il diminuire della massa che con l'aumentare della quota.

Come è possibile notare dal confronto dei nuovi risultati con quelli trovati in prima approssimazione, i Δv trovati non sono troppo dissimili dai precedenti (soprattutto per il secondo stadio, che è meno soggetto ai contributi della resistenza aerodinamica e della forza di gravità), ma a cambiare in modo molto significativo sono le masse di propellente, che hanno un ordine di grandezza di differenza.

La conclusione è che la sola equazione di Tsiolkovsky non basta per un dimensionamento di massima del lanciatore, bisogna quindi affinare i calcoli con metodi numerici più complessi, che considerano anche i contributi delle forze più rilevanti.

Qui di seguito un confronto in tabella tra i valori calcolati:

	<i>Tsiolkovsky</i>	<i>Metodo numerico</i>
Δv_1	930 <i>m/s</i>	1476.0 <i>m/s</i>
Δv_2	9070 <i>m/s</i>	10885 <i>m/s</i>
$M_{propellente,1}$	1569.3 <i>kg</i>	10372 <i>kg</i>
$M_{propellente,2}$	2767.7 <i>kg</i>	10131 <i>kg</i>

4 Tempo di attesa tra i due stadi

Per cercare di ottimizzare ulteriormente la quantità di propellente imbarcato ho pensato di inserire un tempo di attesa tra primo e secondo stadio. Dopo aver calcolato il consumo totale, utilizzando la funzione *min* di *MATLAB*, posso ricavare il valore minore e, dalla sua posizione nella matrice, posso determinare il tempo di attesa ideale.

Questo procedimento è stato ottenuto con due cicli annidati, posti nella parte di codice riguardante il secondo stadio.

Il primo ciclo è un ciclo *for* che permette di variare il tempo di attesa, il secondo è un ciclo *while* che con un'iterazione simile a quella precedente (i contributi di forza aerodinamica e di gravità sono gli stessi, ma non viene considerato il Δv fornito dall'endoreattore) calcola la quota e la velocità per ogni intervallo di tempo.

Dopo un certo numero di iterazioni, quando si arriva al tempo imposto dal ciclo *for* si passa al secondo stadio vero e proprio, che però inizia da condizioni diverse da quelle senza il tempo di attesa, cioè con una quota più alta e una v più piccola.

Ad ogni iterazione del ciclo *for* salvo il consumo di propellente in una matrice, per poi valutarne il minimo come detto prima.

Una volta trovato il minimo si devono rifare dei calcoli molto simili ai precedenti se non fosse che al posto del nostro ciclo *for*, bisognerà imporre direttamente il valore di t dato dalla funzione *min*.

Come si poteva immaginare, essendo l'obiettivo non una determinata quota ma il Δv , il tempo migliore di attesa è: $t = 0$.

Questo vuol dire che il guadagno di quota non compensa la perdita di Δv ottenuta dal tempo di attesa.

5 Traiettoria curva

Per ottimizzare anche la traiettoria devo considerare un angolo di inclinazione (rispetto alla verticale) α variabile.

In questo modo è possibile minimizzare le forze di resistenza aerodinamica nella parte iniziale (con un angolo α nullo) poiché raggiungerò più velocemente delle quote elevate, per poi minimizzare la forza di gravità nella parte finale, con una α maggiore.

Per esempio potrei pensare di far sì che al decollo il lanciatore sia perpendicolare all'orizzonte ($\alpha = 0$) mentre alla quota massima sia parallelo, quindi con $\alpha = 90^\circ$.

Posso trovare subito la quota in cui è pari ad $\alpha = 90^\circ$ ponendo l'accelerazione di gravità uguale all'accelerazione centrifuga, quindi trovando come soluzione un'orbita circolare:

$$g = G \frac{M_{terra}}{(R_{terra}+h)^2} = \frac{\Delta v^2}{(R_{terra}+h)}$$

$$h = \frac{G M_{terra}}{\Delta v^2} - R_{terra}$$

La soluzione dell'equazione è negativa, poiché la velocità è troppo alta per mantenere un'orbita di questo tipo.

Per mantenere una velocità del genere sarebbe necessario viaggiare sotto la superficie terrestre. La soluzione non è fisicamente accettabile.

5.1 Metodo

Utilizzo quindi un approccio diverso e più generale: faccio semplicemente variare α in funzione del tempo.

Per fare ciò mi servo dello stesso script usato per la correzione delle approssimazioni, apportandone delle modifiche.

Prima di tutto inserisco un numero massimo di iterazioni che lo script può eseguire; poiché se l'algoritmo non dovesse convergere il ciclo andrà avanti scartandone la soluzione.

Avrei lo stesso risultato se l'angolo finale fosse maggiore di $\pi/2$.

Ho posto come iterazioni massime $iter_{max} = 50000$ dove le iterazioni sono in comune tra primo stadio, secondo stadio e ciclo *while* a capo di questi due.

Inizializzo una matrice che contenga il risultato del propellente consumato per ogni parametro imposto.

Scelgo una legge che faccia variare α . In questo caso ho scelto una legge che fosse il più semplice possibile, ma questa può essere cambiata lasciando inalterato il resto dello script.

Utilizzo una variazione di α lineare nel tempo.

$$\alpha = A \text{size}(H, 2)$$

Dove la funzione *size* viene utilizzata per misurare facilmente il numero di iterazioni fatte nel tempo.

Il contributo di gravità e la quota quindi saranno calcolate come:

$$\Delta v_g = g dt \cos(\alpha); \quad h = h + v dt \cos(\alpha)$$

Faccio variare il parametro A in un range di valori con un ciclo *for* per poi analizzare l'output, cioè la massa di propellente consumato.

Andando a procedere cercando i valori con risoluzione sempre più alta nell'intorno del valore minore, ottengo:

$$A = 7.25 \bullet 10^{-4} / dt$$

$$\alpha = 7.25 \bullet 10^{-3} t$$

$$M_{propellente} = 13613 \text{ kg}$$

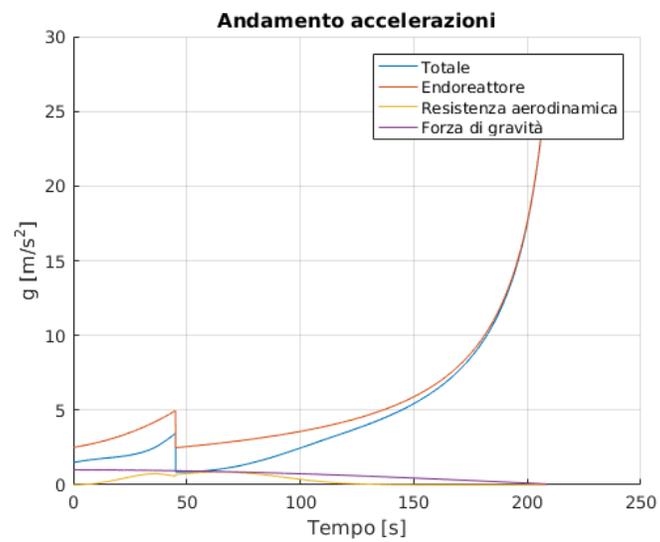
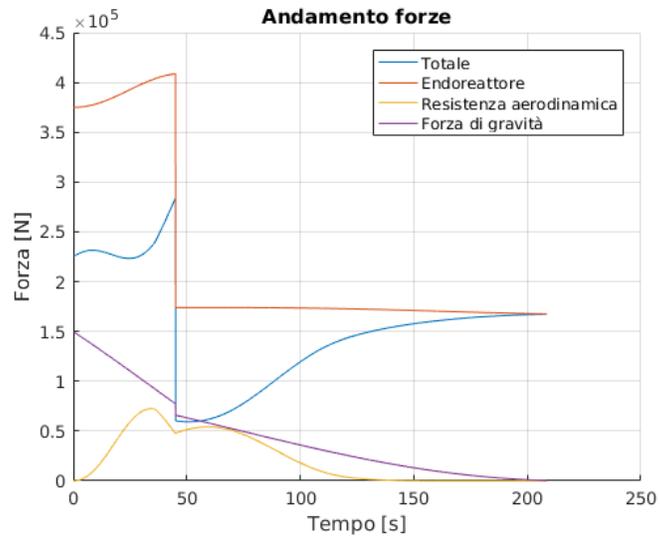
Con α espressa in radianti e t in secondi.

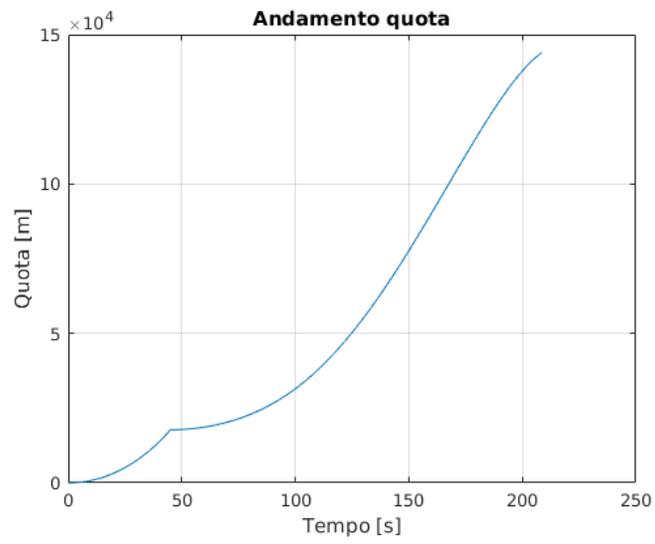
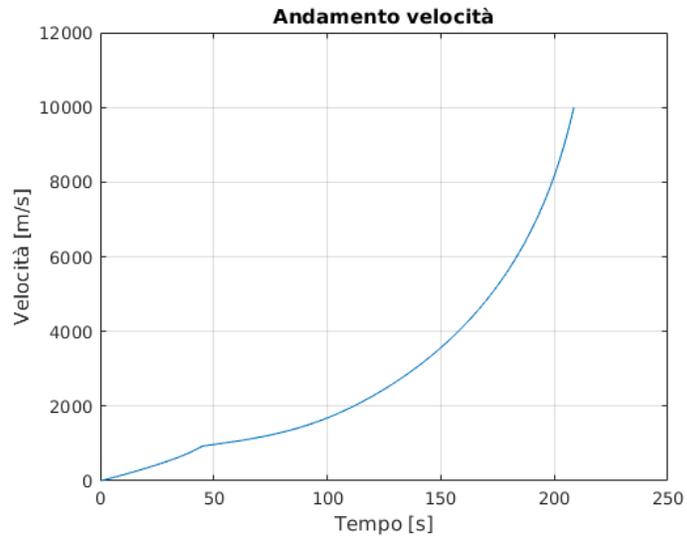
Quindi con una legge di variazione lineare con il tempo ottengo un risparmio massimo sulla massa di propellente imbarcato del 33.6%.

5.2 Risultati e grafici

I risultati ottenuti sono qui riportati, confrontati con quelli ottenuti precedentemente:

	<i>Tsiokovsky</i>	<i>Metodo numerico</i>	$\alpha = 7.25 \bullet 10^{-3} t$
Δv_1	930 <i>m/s</i>	1476.0 <i>m/s</i>	1542.3 <i>m/s</i>
Δv_2	9070 <i>m/s</i>	10885 <i>m/s</i>	10414 <i>m/s</i>
$M_{propellente,1}$	1569.3 <i>kg</i>	10372 <i>kg</i>	7149.6 <i>kg</i>
$M_{propellente,2}$	2767.7 <i>kg</i>	10131 <i>kg</i>	6463.4 <i>kg</i>





Parte IV

Conclusioni

Nella prima parte del lavoro è stato analizzato come suddividere in modo ottimale il Δv tra i due stadi.

Successivamente è stato mostrato come calcolare i Δv reali con un metodo numerico che tenga conto del contributo di pressione sull'area di efflusso, della resistenza aerodinamica e della forza peso.

È stato calcolato l'intervallo di tempo ideale per minimizzare la massa di propellente, ottenuta con un tempo di attesa nullo.

Infine è stata calcolata la legge di variazione lineare dell'angolo di inclinazione del lanciatore che minimizza i consumi. Con una legge semplicemente lineare è stato ottenuto un risparmio del 33.6% sulla massa di propellente imbarcata.

Bibliografia

- Appunti del corso di Propulsione Aerospaziale Prof.Galfetti
- Dispense del corso di Propulsione Aerospaziale Prof.Galfetti
- Dispense del corso di Propulsione Aerospaziale dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza" Prof. Nasuti, Lentini, Gamma